

Un tanque grande contiene inicialmente 60 litros de agua con 20 gramos de azul de metileno

Una mezcla de agua con azul de metileno entra al tanque a razón de 6 litros por minuto y la mezcla tiene 2 g de azul de metileno por litro. La mezcla se mantiene uniformemente mezclada por agitación y la mezcla agitada sale a razón de 3 litros por minuto

Que cantidad de azul de metileno hay en el tanque en cualquier tiempo $t > 0$?

Sea x cantidad de azul de metileno en el tiempo t

$$\frac{dx}{dt} = \text{ENTRADA} - \text{SALIDA}$$

La cantidad de azul de metileno que entra es $\frac{2g}{lt} \cdot 6 \frac{lt}{\text{min}} = 12g/\text{min}$

La cantidad de azul de metileno que sale es $C \frac{g}{lt} 3 \frac{lt}{\text{min}} = 3C \frac{g}{\text{min}}$, donde C es la concentración

Puesto que la rapidez de entrada es mayor que la de salida, por cada minuto se ganan $6lt - 3lt = 3lt$

Como inicialmente hay 60 lt de agua con azul de metileno, la cantidad de mezcla es de $60 + 3t$

De esto resulta que la concentración es $\frac{x}{60+3t} g/lt$

Luego, $\text{SALIDA} = 3 \frac{x}{60+3t} g/lt = \frac{x}{20+t} g/lt$

$$\frac{dx}{dt} = 12 - \frac{x}{20+t}$$

Consideremos la ecuación homogénea

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{20+t}$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{20+t}$$

$$\ln|x| = -\ln|20+t| + K_1$$

$$x(t) = \frac{K_2}{20+t}$$

Hagamos variar el parámetro K_2

$$\frac{dK_2}{dt} (20+t) - K_2 = 12 - \frac{K_2}{20+t}$$

$$\frac{dK_2}{dt} (20+t) - K_2 = 12 - \frac{K_2}{(20+t)^2}$$

$$\frac{dK_2}{dt} - \frac{K_2}{(20+t)^2} = 12 - \frac{K_2}{(20+t)^2}$$

$$\frac{dK_2}{dt} = 12$$

$$\frac{dK_2}{dt} = 12(20+t)$$

$$K_2 = 6(20+t)^2 + k_3$$

$$x(t) = \frac{6(20+t)^2 + k_3}{20+t} = 6(20+t) + \frac{k_3}{20+t}$$

Ahora, sabemos que en $t = 0, x(0) = 20$

$$20 = 120 + \frac{k_3}{20}$$

$$-100 = \frac{k_3}{20}$$

$$-2000 = k_3$$

$$x(t) = 6(20+t) - \frac{2000}{20+t}$$

